El Estudio Completo de Función abarca la determinación de lo siguiente

- *Dominio*
- *Intersección con los ejes - Ceros de la función y ordenada al origen*
- *Paridad o simetría*
- *Análisis de la discontinuidad/continuidad*
- *Signos de la función*
- *Límites a puntos característicos*
- *Cálculo de asíntotas: vertical, horizontal y/o oblicua*
- *Máximos y/o mínimos relativos o locales*
- *Crecimiento y decrecimiento*
- *Puntos de inflexión*
- *Intervalos de concavidad*
- *Gráfica*
- *Imagen*

En el siguiente cuadro tenes resumido todos los ítems detallados

Dominio	*Es el conjunto de valores de la variable independiente para los cuales existe función.* *Si trabajamos en el conjunto de los números reales R, tenemos*	❑ $f(x) = P(x) \Rightarrow Df = R$ ❑ $f(x) = h(x) * g(x) \Rightarrow Df = Dh \cap Dg$ ❑ $f(x) = h(x) / g(x) \Rightarrow Df = D h \cap Dg$ y $g(x) \neq 0$ ❑ $f(x) = \log_a(x) \Rightarrow Df = \{ x/x \in R \text{ y } x>0\}$ ❑ $f(x) = \sqrt[n]{x}$ con n par $\Rightarrow Df = \{ x/x \in R \text{ y } x \geq 0\}$ ❑ $f(x) = sen(x)$; $f(x) = cos(x) \Rightarrow Df = R$ ❑ $f(x) = a^x \Rightarrow Df = R$
Intersección con los ejes	*Ceros de la función*	
	Son aquellos valores de la variable independiente donde la función corta/toca al eje de las absisas (raíces). $y = f(x) \Rightarrow y = 0$, $f(x) = 0$ *Pueden existir uno, infinitos o ningún valor.*	❑ $f(x) = a^x$ no tiene ceros cualquiera sea su exponente. ❑ $f(x) = \log_a x$ tiene un cero en $x = 1$ cualquiera su base. ❑ $f(x) = sen\ x$ tiene infinitos ceros para $x = k\pi$ con $k \in Z$ ❑ $f(x) = cos\ x$ tiene infinitos ceros para $x = (2k+1)\pi/2$ con $k \in Z$ ❑ $f(x) = f(x) / g(x)$ los ceros son aquellos valores de x que anulan a f(x) y no anulan a g(x) simultáneamente.
	Ordenada al origen	
	Es aquel valor en que la función corta al eje de las ordenadas. Pueden existir uno o ningún valor. $y = f(x)$ $x = 0 \Rightarrow y = f(0)$	
Paridad o simetría	*Función par*	
	Si $f(-x) = f(x)$ *La gráfica es simétrica respecto al eje y.*	
	Función impar	
	Si $f(-x) = -f(x)$ *La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas.*	
	Función sin paridad definida	
	Cuando no cumple ninguna de las condiciones antes expresadas. La función no es par ni impar.	
Continuidad	*Discontinuidad*	
	Se estudian los puntos de discontinuidad (donde no existe función y/o otros valores finitos) y se clasifica cada uno de ellos. *Discontinuidad evitable:* $\lim_{a^+} f(x) = \lim_{a^-} f(x) = L$ *Discontinuidad esencial:* $\lim_{a^+} f(x) \neq \lim_{a^-} f(x)$	
	Continuidad	
	La función será continua en aquellos valores del dominio donde no se haya determinado discontinuidad.	
Signos de la función	*Determinar intervalos teniendo en cuenta el dominio y ceros de la función. Para conocer cuál es el signo de la función en cada uno de los intervalos es suficiente con tomar un valor de x incluido en cada uno de ellos y determinar el signo del valor resultante*	

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">(positivo o negativo).
f(x) > 0 ⇨ gráfica por encima del eje x f(x) < 0 ⇨ gráfica por debajo del eje x</td></tr>
<tr><td>Límites a ptos. característicos</td><td colspan="2">Este estudio incluye el cálculo de los límites para valores de la variable independiente infinitamente grandes e infinitamente pequeños (según corresponda). Además, se calculan los límites laterales en los puntos de discontinuidad.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Asíntotas</td><td colspan="2">Asíntota vertical</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si $lim_a f(x) = \pm\infty$ ⇨ existirá AV en x = a También puede calcularse la tendencia por derecha y/o por izquierda.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Asíntota horizontal</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si $lim_{+\infty} f(x) = K_1$ ⇨ existe semi AH en y = K_1
Si $lim_{-\infty} f(x) = K_2$ ⇨ existe semi AH en y = K_2 Si $K_1 = K_2$ la AH será única. K_1 y K_2 son números finitos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Asíntota oblicua</td></tr>
<tr><td colspan="2">Existirá AO en y = mx + n
Si $m = lim_{\mp\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0 \; e \; \infty$ y además $n = lim_{\mp\infty} (f(x) - mx) \neq \infty$ $Si \exists AH, \nexists AO \; para \; el \; mismo \; tramo \; del \; Df$</td></tr>
<tr><td>Máximos y mínimos relativos</td><td>Criterio del signo de la derivada segunda</td><td>Criterio del signo de la derivada primera</td></tr>
<tr><td></td><td>❑ $f' = 0$
❑ $f'' \neq 0$
si $f'' > 0$ ⇨ Existe mínimo relativo
si $f'' < 0$ ⇨ Existe máximo relativo</td><td>En un entorno de $x = x_0$ (incremento h)
❑ $f' = 0$
❑ $Pasa \; de \; f'(x_0 - h) > 0 \; a \; f'(x_0 + h) < 0$ ⇨Existe máximo rel
$Pasa \; de \; f'(x_0 - h) < 0 \; a \; f'(x_0 + h) > 0$ ⇨ Existe mínimo rel.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Existirán máximos y/o mínimos relativos en los Puntos Críticos $(x_i , f(x_i))$. Dichos puntos surgen haciendo:
➢ $f' = 0$ (valores de x que anulan la derivada primera) y
➢ $\nexists f'$ (valores de x para los cuales la derivada primera no está definida)</td></tr>
<tr><td>Crecimiento y decrecimiento</td><td>❑ $f'(x_0) > 0$ ⇨ Crece
❑ $f'(x_0) < 0$ ⇨ Decrece</td><td>El crecimiento/decrecimiento se estudia por intervalos. Hay que localizar los puntos críticos posibles máximos y/o mínimos relativos e intercalarlos en el dominio de la función. En los intervalos que quedan determinados se analiza el crecimiento/decrecimiento tomando un valor intermedio y determinando el signo de la f' en cada uno de ellos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Puntos de Inflexión</td><td>Criterio del signo de la derivada tercera</td><td>Criterio del signo de la derivada segunda</td></tr>
<tr><td>❑ $f'' = 0$
❑ $f''' \neq 0$ ⇨ Existe Punto de Inflexión</td><td>En un entorno de $x = x_0$ (incremento h)
❑ $f'' = 0$
❑ Pasa de $f''(x_0 - h) > 0 \; a \; f''(x_0 + h) < 0$ ó
Pasa de $f''(x_0 - h) < 0 \; a \; f''(x_0 + h) > 0$ ⇨ Existe Pto. De Inf.</td></tr>
</table>

	Existirán puntos de inflexión en los Puntos Críticos (x_i , $f(x_i)$). Dichos puntos surgen haciendo: ➢ $f'' = 0$ *(valores de x que anulan la derivada segunda)* *y* ➢ $\nexists f''$ *(valores de x para los cuales la derivada segunda no está definida)*	
Concavidad	❑ $f'' > 0$ ⇨ *Cóncava* ❑ $f'' < 0$ ⇨ *Convexa*	*La concavidad se estudia por intervalos. Hay que localizar los puntos críticos, posibles puntos de inflexión e intercalarlos en el dominio de la función. En los intervalos que quedan establecidos se analiza la concavidad tomando un valor intermedio y determinando el signo de la f'' en cada uno.*
Representación gráfica	❑ *Trazar los ejes y marcar la escala. Marcar los puntos hallados y graficar.*	

Vemos un ejemplo

$$f(x) = \frac{(x-1)}{x^3}$$

- *Dominio*

$$Df: \ IR - \{0\}$$

- *Intersección con los ejes - Ceros de la función y ordenada al origen*

Eje y: $\nexists$ *intersección con el eje y*

Eje x: $y = 0 \quad x = 1$

- *Paridad o simetría*

$$f(-x) = \frac{-x-1}{(-x)^3} = \frac{-x-1}{-x^3} = \frac{x+1}{x^3} \neq f(x) \quad y \quad \neq -f(x)$$

La función no tiene paridad definida

- *Análisis de la discontinuidad/continuidad*

Analizamos para $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x^3} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x^3} = -\infty$$

$\exists$ *una discontinuuidad esencial en* $x = 0$

- *Signos de la función*

	$(-\infty; \mathbf{0})$	$(\mathbf{0}; \mathbf{1})$	$(\mathbf{1}; +\infty)$
$x-1$	*Negativo*	*Negativo*	*Positivo*
x^3	*Negativo*	*Positivo*	*Positivo*
$\boldsymbol{f(x)}$	***Positivo***	***Negativo***	***Positivo***

- *Límites a puntos característicos*

Límites en los puntos de discontinuidad $\lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x^3} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x^3} = -\infty$

Límites para cuando la variable tiende a valores extremadamente grandes y pequeños

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^3} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^3} = 0$$

- *Cálculo de asíntotas: vertical, horizontal y/o oblicua*

Asíntota Vertical

$$lim_{\,0^+} \frac{(x-1)}{x^3} = -\infty \qquad lim_{\,0^-} \frac{(x-1)}{x^3} = +\infty \quad ,$$

$$\exists\ AV\ en\ x = 0$$

Asíntota Horizontal

$$lim_{\,\mp} \frac{(x-1)}{x^3} = 0 \quad , \ \exists\ AH\ en\ y = 0$$

$\exists$ *intersección de* $f(x)$ *con la AH en* $x = 1$

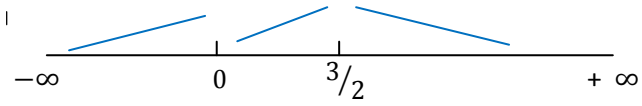
- *Máximos y/o mínimos relativos o locales*

$$f' = \frac{-2x+3}{x^4} \qquad f'' = \frac{6\,(x-2)}{x^5}$$

$$f' = 0 \ \ entonces \ \ x = \frac{3}{2}$$

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \quad entonces \quad \exists\ máximo\ relativo\ en\ x = \frac{3}{2} \quad ; \quad \left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{4}{27}\right)$$

- *Crecimiento y decrecimiento*



$f'(-1) > 0 \quad f(x)\ Crece\ en\ (-\infty;\ 0)$

$f'(1) > 0 \quad f(x)\ Crece\ en\ (0;\ \frac{3}{2})$

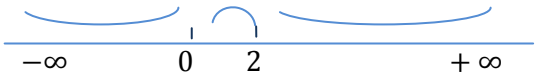
$f'(7) < 0 \quad f(x)\ Decrece\ en\ (\frac{3}{2};\ +\infty)$

- *Puntos de inflexión*

$f'' = 0 \ \ entonces \ \ x = 2$

$f''(1) < 0 \quad y \quad f''(3) > 0 \ , \qquad \exists\ P.I.\ en\ \ x = 2 \quad ; \quad \left(2\,;\,\frac{1}{8}\right)$

- *Intervalos de concavidad*

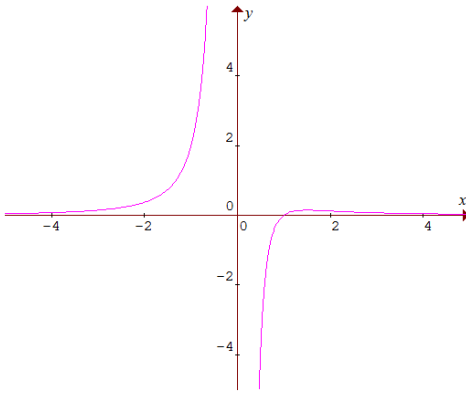


$f''(-1) > 0 \quad f(x)\ es\ Cóncava\ en\ (-\infty;\ 0\ \ )$

$f''(1) < 0 \quad f(x)\ es\ Convexa\ en\ (0;\ 2)$

$f''(10) > 0 \quad f(x)\ es\ Cóncava\ en\ (2;\ +\infty)$

- *Gráfica*



- *Imagen*

$$I(f) = R$$